

par Mohamed TARQI

Partie I

1. (a) Soient f et g deux éléments de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$ et $(x, y) \in \mathbf{D}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(fg)(x, y) &= x \frac{\partial(fg)}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial(fg)}{\partial y}(x, y) \\ &= x \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)g(x, y) + f(x, y) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \right) + y \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g(x, y) + f(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) g(x, y) + \left(x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) f(x, y).\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbf{T}(fg) = g\mathbf{T}(f) + f\mathbf{T}(g)$.

- (b) Soit f un élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$ et $(x, y) \in \mathbf{D}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t) \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(r, t) \frac{\partial t}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t) - \frac{y}{x^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(r, t).\end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t) \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(r, t) \frac{\partial t}{\partial y}(x, y) \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t) + \frac{1}{x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(r, t).\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(f)(x, y) &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t) - \frac{y}{x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(r, t) + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t) + \frac{y}{x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(r, t) \\ &= r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t).\end{aligned}$$

- (c) Si F est différentiable en un point a , on note $\mathbf{J}_f(a)$ la matrice jacobienne de F en a . On sait que pour $(x, y) \in \mathbf{D}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\varphi \circ f}(x, y) &= \mathbf{J}_\varphi(f(x, y)) \times \mathbf{J}_f(x, y) \\ &= \varphi'(f(x, y)) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \left(\varphi'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \varphi'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\varphi \circ f)(x, y) &= x \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y}(x, y) \\ &= x \varphi'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \varphi'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &= \varphi'(f(x, y)) \mathbf{T}f(x, y)\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{T}(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f) \mathbf{T}f$.

2. Étude de $\mathbf{N}_0$.

(a) Pour tout $(x, y) \in \mathbf{D}$, on a :

$$\mathbf{T}t(x, y) = x \frac{\partial t}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial t}{\partial y}(x, y) = x \left(\frac{-y}{x^2} \right) + y \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

D'où $\mathbf{T}t = 0$.

(b) Soit $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a :

$$\mathbf{T}(\varphi \circ t) = (\varphi' \circ t) \mathbf{T}t = 0.$$

D'où $\mathbf{T}(\varphi \circ t) = 0$.

(c) Soit $f \in \mathbf{N}_0$, alors $\mathbf{T}f(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{D}$. Mais $\mathbf{T}f(x, y) = r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r, t) = 0$, donc $\tilde{f} = \varphi(t)$ où φ est une fonction de classe $\mathbf{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ d'une seule variable. Ainsi $f(x, y) = \tilde{f}(r, t) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, donc la solution générale de $\mathbf{T}f = 0$ est de la forme $(x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ où φ est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

3. Étude de $\mathbf{N}_1$.

(a) Pour tout $(x, y) \in \mathbf{D}$, on a :

$$\mathbf{T}r(x, y) = x \frac{\partial r}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial r}{\partial y}(x, y) = x \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + y \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = r(x, y).$$

D'où $\mathbf{T}r = r$.

(b) Soit $\varphi \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a :

$$\mathbf{T}(\varphi \circ r) = (\varphi' \circ r) \mathbf{T}r = (\varphi' \circ r) r.$$

En particulier si $\varphi(u) = u^k$ où $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$\mathbf{T}(r^k) = (\varphi' \circ r) r = k r^{k-1} r = k r^k.$$

(c) Soit $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $r^{-1}f \in \mathbf{N}_0$, donc il existe φ de classes $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ tel que $r^{-1}f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{D}$, donc $f(x, y) = r(x, y) \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = r(x, y) \varphi \circ t(x, y)$. Ainsi, $f = r(\varphi \circ t)$.

Inversement, si f est la forme précédente, on a :

$$\mathbf{T}[r(\varphi \circ t)] = r \mathbf{T}(\varphi \circ t) + (\varphi \circ t) \mathbf{T}r = (\varphi \circ t) \mathbf{T}r = r(\varphi \circ t).$$

Donc $r(\varphi \circ t) \in \mathbf{N}_1$. D'où l'équivalence :

$$f \in \mathbf{N}_1 \iff r^{-1}f \in \mathbf{N}_0.$$

En conséquence les fonctions de $\mathbf{N}_1$ sont de la forme $(x, y) \mapsto r(x, y) \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ où φ est une fonction de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ d'une seule variable.

4. Étude de $\mathbf{N}_\alpha$.

(a) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $r^{-k}f \in \mathbf{N}_0$, donc il existe une fonction φ de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ tel que $r^{-k}f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, donc $f(x, y) = r^k(x, y) \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = r(x, y)^k \varphi \circ t(x, y)$ ou encore $f = r^k(\varphi \circ t)$.

Inversement, si f est la forme précédente, on a :

$$\mathbf{T}[r^k(\varphi \circ t)] = r^k \mathbf{T}(\varphi \circ t) + (\varphi \circ t) \mathbf{T}r^k = (\varphi \circ t) \mathbf{T}r^k = k r^k(\varphi \circ t).$$

Donc $r^k(\varphi \circ t) \in \mathbf{N}_k$. D'où l'équivalence :

$$f \in \mathbf{N}_k \iff r^{-k}f \in \mathbf{N}_0.$$

En conséquence les fonctions de $\mathbf{N}_k$ sont de la forme $(x, y) \mapsto r^k(x, y) \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ où φ est une fonction de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ d'une seule variable.

(b) Soit α un nombre complexe, pour tout $(x, y) \in \mathbf{D}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(r^\alpha)(x, y) &= x \frac{\partial(e^{\alpha \ln r})}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial(e^{\alpha \ln r})}{\partial y}(x, y) \\ &= \alpha x \frac{\partial \ln r}{\partial x}(x, y) e^{\alpha \ln r}(x, y) + \alpha y \frac{\partial \ln r}{\partial y}(x, y) e^{\alpha \ln r} \\ &= \alpha r^\alpha(x, y)\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{T}(r^\alpha) = \alpha r^\alpha$.

Comme précédemment les éléments de $\mathbf{N}_\alpha$ sont de la forme $(x, y) \mapsto r^\alpha(x, y)\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ où φ est une fonction de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ d'une seule variable..

Partie II

Dans cette partie, on suppose donnés deux nombres complexes α et β , une fonction g non nulle élément de $\mathbf{N}_\beta$ et une fonction φ_0 élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. On se propose de résoudre l'équation d'inconnue f , élément de $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$:

$$\mathbf{T}f - \alpha f = g\varphi_0(r).$$

1. On suppose d'abord $\varphi_0 = 1$, l'équation devenant alors :

$$(1) \quad \mathbf{T}f - \alpha f = g.$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f = \lambda g$, on a $g = \mathbf{T}f - \alpha f = \lambda(\mathbf{T}g - \alpha g) = \lambda(\beta - \alpha)g$, et comme g est non nulle et $\alpha \neq \beta$, alors $\lambda = \frac{1}{\beta - \alpha}$. Ainsi la fonction $f_0 = \frac{1}{\beta - \alpha}g$ est une solution particulière de (1).

f solution de (1) si, et seulement si, $f - f_0 \in \mathbf{N}_\alpha$. Donc les solutions de (1) sont de la forme $(x, y) \mapsto \frac{1}{\beta - \alpha}g(x, y) + r^\alpha(x, y)\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ où φ est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Soit φ est une fonction de $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et $f = \varphi(r)g$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}f - \alpha f &= g\mathbf{T}\varphi(r) + \varphi(r)\mathbf{T}g - \alpha\varphi(r)g \\ &= g\varphi'(r)\mathbf{T}r + \alpha\varphi(r)g - \alpha\varphi(r)g \\ &= r\varphi'(r)g.\end{aligned}$$

Donc f est solution de (1) si, et seulement si, $r\varphi'(r) = 1$ ou encore $\varphi'(r) = \frac{1}{r}$. Donc il suffit de prendre par exemple $\varphi(r) = \ln r$.

Donc la solution générale de (1) est de la forme $f = g \ln r + r^\alpha \varphi \circ t$ où φ est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

2. • On pose $g_1(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^5 + xy}$, on vérifie facilement que $\mathbf{T}g_1 = 0$, donc $g \in \mathbf{N}_0$. Donc d'après l'étude précédente la solution générale de $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^5 + xy}$, qui s'écrit $\mathbf{T}f - f = g_1$, est de la forme $f = -g_1 + r(\varphi \circ t)$ où φ est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (ici $\alpha = 1$ et $\beta = 0$).

• On pose $g_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^5 + xy}$, on vérifie aussi que $\mathbf{T}g_2 - 2g_2 = 0$, donc $g \in \mathbf{N}_2$. Donc d'après l'étude précédente la solution générale de $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)(x - y)}{x + y}$, qui s'écrit $\mathbf{T}f - 2f = g_2$, est de la forme $f = g_2 \ln r + r^2(\varphi \circ t)$ où φ est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (ici $\alpha = \beta = 2$).

3. Soit g est un élément de $\mathbf{N}_\beta$.

(a) Cherchons une condition sur φ pour que $\varphi(r)g$ soit une solution de (2). On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\varphi(r)g) - \alpha\varphi(r)g &= \varphi(r)\mathbf{T}g + g\mathbf{T}\varphi(r) - \alpha\varphi(r)g \\ &= \beta\varphi(r)g + g\varphi'(r)r - \alpha\varphi(r)g \\ &= (\beta - \alpha)\varphi(r)g + r\varphi'(r)g \\ &= [(\beta - \alpha)\varphi(r) + r\varphi'(r)]g\end{aligned}$$

Donc φ solution de l'équation différentielle $xy' + (\beta - \alpha)y = \varphi_0$. La méthode de la variation de la constante montre que $\varphi(r) = r^{\alpha-\beta} \int r^{\beta-\alpha-1} \varphi_0(r) dr$.

Soit f_0 une solution particulière de (2), donc f solution de (2) si, et seulement si, $f - f_0$ solution de $\mathbf{T}f - \alpha f = 0$, c'est-à-dire $f - f_0 \in \mathbf{N}_\alpha$, donc f est de la forme $f_0 + r^\alpha (\varphi \circ t)$ où φ est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

- (b) Ici $\varphi(r) = \int \frac{\ln r}{r} dr = \frac{(\ln r)^2}{2} + \lambda$ ou λ est une constante arbitraire. Donc les solutions de l'équation $\mathbf{T}f - \alpha f = g \ln r$ sont de la forme $\frac{(\ln r)^2}{2} g + r^\alpha (\varphi \circ t)$.

Partie III

- $\mathbf{T}^2 f = 0 \Leftrightarrow \mathbf{T}f \in N_0$, donc il existe une fonction φ_1 de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ tel que $\mathbf{T}f = \varphi_1 \circ t$. Comme $\mathbf{T}(\varphi_1 \circ t) = 0$, alors d'après la question II 1.b), l'équation $\mathbf{T}f = \varphi_1 \circ t$ admet une solution particulière de la forme $(\varphi_1 \circ t) \ln r$ (ici $\alpha = \beta = 0$), donc la solution générale de $\mathbf{T}^2 f = 0$ s'écrit sous la forme $f = (\varphi_1 \circ t) \ln r + \varphi_2 \circ t$ où φ_2 est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
- Cherchons d'abord un solution particulière f_0 de $\mathbf{T}^2 f = g$. Donc $\mathbf{T}f_0$ est solution particulière de $\mathbf{T}h = g$, on peut prendre $\mathbf{T}f_0$ sous la forme $\mathbf{T}f_0 = g \ln r$ ($\alpha = \beta = 0$). Donc on peut prendre f_0 est de la forme $\frac{1}{2} (\ln r)^2 g$.
Ainsi $\mathbf{T}^2 f = g \Leftrightarrow \mathbf{T}^2(f - f_0) = 0$, donc d'après la première question de cette partie $f - f_0 = \ln r (\varphi_1 \circ t) + \varphi_2 \circ t$. D'où la solution générale de $\mathbf{T}^2 f = g$:

$$f = \frac{1}{2} (\ln r)^2 g + \ln r (\varphi_1 \circ t) + \varphi_2 \circ t.$$

- $\mathbf{T}^3 f = 0 \Leftrightarrow \mathbf{T}u = 0$ où $u = \mathbf{T}^2 f$ et $\mathbf{T}u = 0$, donc $u = \varphi_1 \circ t$ et $f = \frac{1}{2} (\ln r)^2 (\varphi_1 \circ t) + \ln r (\varphi_2 \circ t) + \varphi_3 \circ t$ où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Supposons que la solution générale de $\mathbf{T}^n f = (n \in \mathbb{N}^*)$ est de la forme $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\ln r)^k (\varphi_k \circ t)$ où $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ sont de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. On a

$$\mathbf{T}f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \mathbf{T} \left[(\ln r)^k (\varphi_k \circ t) \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \mathbf{T} \left[(\ln r)^k \right] (\varphi_k \circ t) + \sum_{k=0}^{n-1} (\ln r)^k \mathbf{T}(\varphi_k \circ t).$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\ln r)^k &= \ln r \mathbf{T}(\ln r)^{k-1} + (\ln r)^{k-1} \mathbf{T}(\ln r) \\ &= (\ln r)^2 \mathbf{T}(\ln r)^{k-2} + \ln r \times \ln r^{k-2} \mathbf{T}(\ln r) + (\ln r)^{k-1} \\ &= (\ln r)^2 \mathbf{T}(\ln r)^{k-2} + 2(\ln r)^{k-2} \end{aligned}$$

On conclut par récurrence que $\mathbf{T}(\ln r)^k = k (\ln r)^{k-1}$, d'où $\mathbf{T}f_n = f_{n-1}$ puis par récurrence $\mathbf{T}^{n-1} f_n = \varphi_0 \circ t$ et donc $\mathbf{T}^n f_n = 0$. D'où :

$$\mathbf{T}^n f = 0 \Leftrightarrow \text{il existe des fonctions } \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \text{ de classe } \mathbf{C}^1 \text{ sur } \mathbf{D} \text{ telles que } f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (\ln r)^k (\varphi_k \circ t).$$

Partie IV

- Si $(\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I}) \circ (\mathbf{T} - \beta \mathbf{I}) f = 0$ alors $\mathbf{T}f - \beta f \in \mathbf{N}_\alpha$, donc $\mathbf{T}f - \beta f = r^\alpha \varphi \circ t$. Comme $\mathbf{T}(r^\alpha \varphi \circ t) = r^\alpha \mathbf{T}(\varphi \circ t) + \mathbf{T}(r^\alpha) \varphi \circ t = \alpha r^\alpha \varphi \circ t$, donc $r^\alpha \varphi \circ t \in \mathbf{N}_\alpha$. D'où :

$$f = \begin{cases} \ln r \times r^\alpha \varphi \circ t + r^\alpha \varphi \circ t & \text{si } \alpha = \beta \\ \frac{1}{\beta - \alpha} r^\alpha \varphi \circ t + r^\beta \varphi \circ t & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

2. f solution de $(\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I}) \circ (\mathbf{T} - \beta \mathbf{I})f = g$ si, et seulement si, $h = (\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I})f$ solution de $(\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I})h = g$. D'où :

$$h = \begin{cases} \frac{1}{\gamma - \alpha}g + r^\alpha \varphi \circ t & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ g \ln r + r^\beta \varphi \circ t & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

3. L'équation d'inconnue $f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{D})$:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{D}, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = kf(x, y)$$

est équivalente à $\mathbf{T}^2 f - \mathbf{T}f - kf = 0$. Cette dernière équation s'écrit $(\mathbf{T} - \alpha \mathbf{I}) \circ (\mathbf{T} - \beta \mathbf{I}) = 0$ où $\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{1 + 4k}}{2}$. Donc d'après la question 1. de cette partie,

$$f = \begin{cases} \ln r \times r^\alpha \varphi \circ t + r^\alpha \varphi \circ t & \text{si } k = \frac{-1}{4}, \\ \frac{1}{\beta - \alpha} r^\alpha \varphi \circ t + r^\beta \varphi \circ t & \text{si } k \neq \frac{-1}{4}. \end{cases}$$
